Ungerade Funktion* - 1_1188, FA4.1, Offenes Antwortformat

Für die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^n$ $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ mit ungeradem $n \in \mathbb{N}$ ist die nachstehende Wertetabelle gegeben.

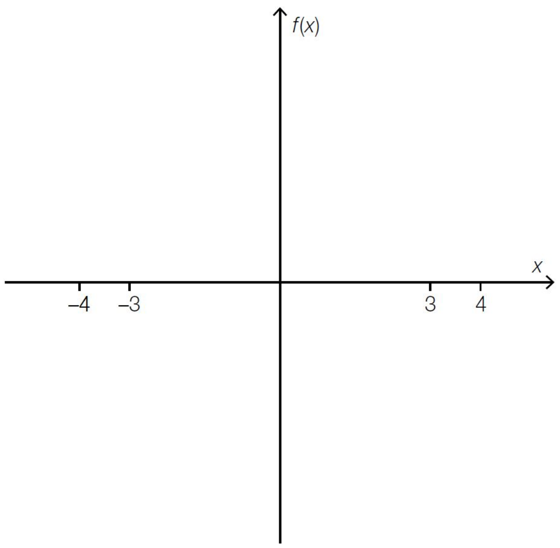
x	–2	0	2
$f(x)$	v	0	w

Dabei sind $v, w \in \mathbb{R}$.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen v und w in Form einer Gleichung an.

Verlauf einer Polynomfunktion vierten Grades* - 1_695, FA4.1, Konstruktionsformat

Es gibt Polynomfunktionen vierten Grades, die genau drei Nullstellen x_1, x_2 und x_3 mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und $x_1 < x_2 < x_3$ haben.
Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem im Intervall [–4; 4] den Verlauf des Graphen einer solchen Funktion f mit allen drei Nullstellen im Intervall [–3; 3]!

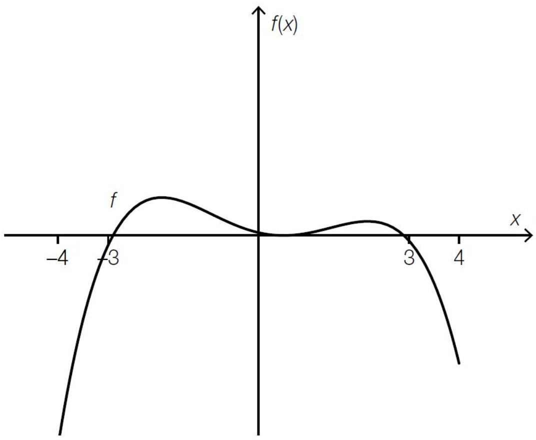


Lösungserwartung: Ungerade Funktion* - 1_1188, FA4.1, Offenes Antwortformat

$v = -w$

Lösungserwartung: Verlauf einer Polynomfunktion vierten Grades* - 1_695, FA4.1, Konstruktionsformat

mögliche Lösung:



Parabel

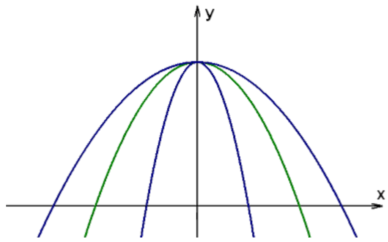
Aufgabennummer: 1_269	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Graph einer Polynomfunktion zweiten Grades mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ist eine Parabel.

Aufgabenstellung:

Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten a, b und c jedenfalls erfüllen, damit die Parabel (so wie in der nebenstehenden Skizze) nach unten offen ist und ihren Scheitel auf der y-Achse hat?



Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$a < 0$	☐
$a > 0$	☐
$b = 0$	☐
$b < 0$	☐
$c = 0$	☐

Lösung

$a < 0$	☒
$b = 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Polynomfunktion*

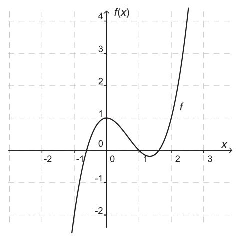
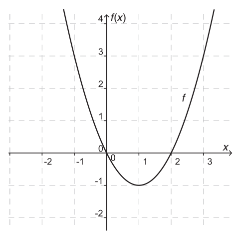
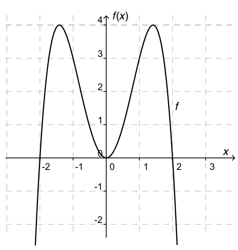
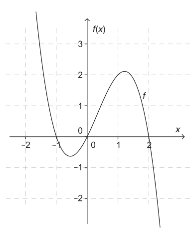
Aufgabennummer: 1_123	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Es sind die Graphen von vier Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben.

Aufgabenstellung:

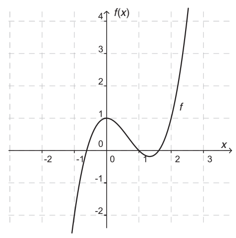
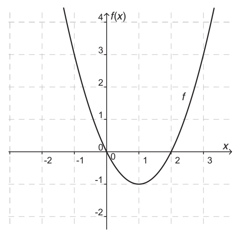
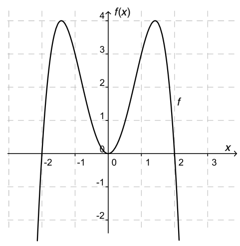
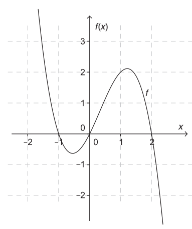
Ordnen Sie den folgenden Graphen jeweils die entsprechende Funktionsgleichung zu!

A	$f(x) = x^2 - 2x$
B	$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$
C	$f(x) = x^2 + 2x - 1$
D	$f(x) = -x^4 + 4x^2$
E	$f(x) = x^4 - 4x^3$
F	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/1807) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

	F
	A
	D
	B

A	$f(x) = x^2 - 2x$
B	$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$
C	$f(x) = x^2 + 2x - 1$
D	$f(x) = -x^4 + 4x^2$
E	$f(x) = x^4 - 4x^3$
F	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn alle vier Buchstaben richtig zugeordnet sind.

Quadratische Funktion

Aufgabennummer: 1_103	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine quadratische Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Ihr Graph ist eine Parabel.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vorgegebenen Bedingungen für *a, b* und *c* die daraus jedenfalls resultierende Eigenschaft zu!

$a < 0$	
$a > 0$	
$c = 0$	
$b = 0$	

A	Der Funktionsgraph hat keine Nullstelle.
B	Der Graph hat mindestens einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
C	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Hochpunkt.
D	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Tiefpunkt.
E	Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur x-Achse.
F	Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

Lösungsweg

$a < 0$	C
$a > 0$	D
$c = 0$	B
$b = 0$	F

A	Der Funktionsgraph hat keine Nullstelle.
B	Der Graph hat mindestens einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
C	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Hochpunkt.
D	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Tiefpunkt.
E	Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur x-Achse.
F	Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn alle Buchstaben korrekt zugeordnet wurden.

Zusammenhang Tabelle – Graph

Aufgabennummer: 1_289	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Von Polynomfunktionen f mit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$ kennt man die Funktionswerte $f(x)$ an einigen Stellen x.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Tabellen jeweils einen möglichen Graphen (aus A bis F) richtig zu!

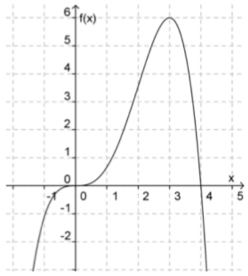
x	$f_1(x)$
–3	4
–1	0
1	2

x	$f_2(x)$
–2	–2
0	0
2	–2

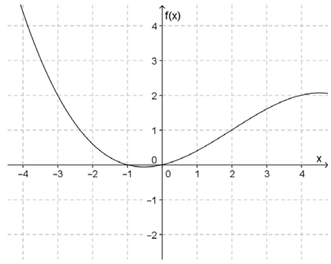
x	$f_3(x)$
0	0
3	6
4	0

x	$f_4(x)$
–3	2
–1	0
3	2

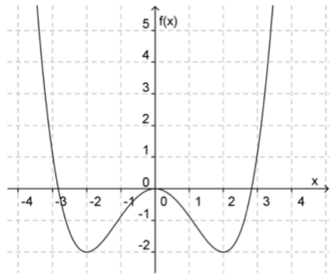
A



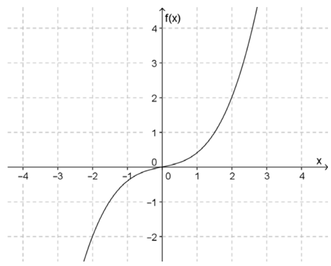
B



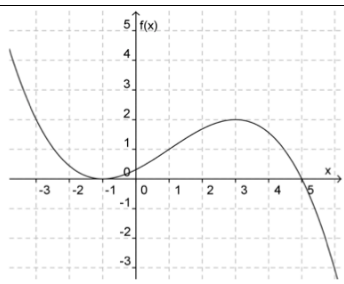
C



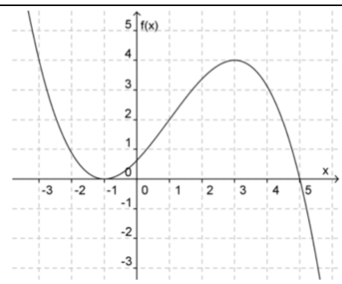
D



E



F



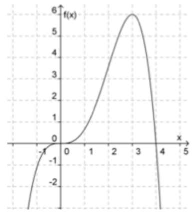
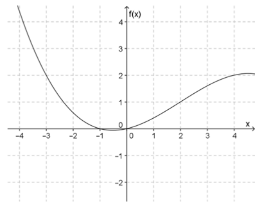
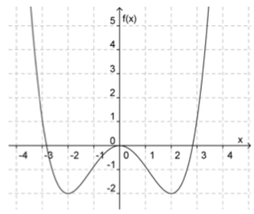
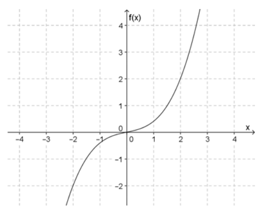
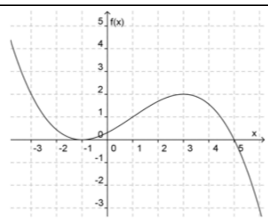
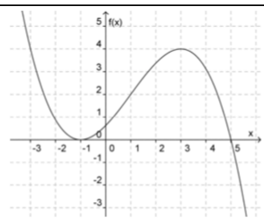
Lösung

x	$f_1(x)$	
–3	4	F
–1	0	
1	2	

x	$f_2(x)$	
–2	–2	C
0	0	
2	–2	

x	$f_3(x)$	
0	0	A
3	6	
4	0	

x	$f_4(x)$	
–3	2	E
–1	0	
3	2	

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Tabellen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Skalierung der Achsen

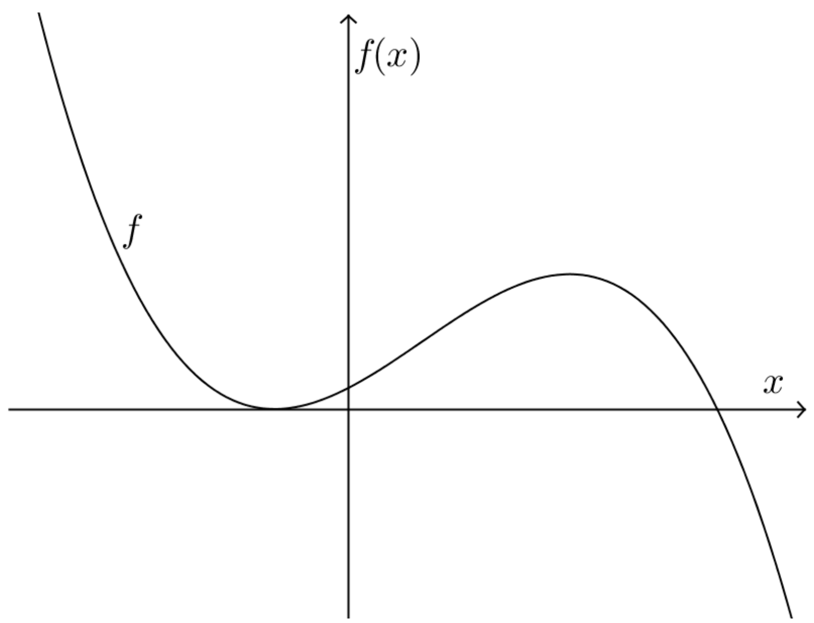
Aufgabennummer: 1_288	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die unten stehende Grafik zeigt einen Ausschnitt des Graphen einer Polynomfunktion *f* vom Grad 3. In der nebenstehenden Wertetabelle sind die Koordinaten einzelner Punkte angeführt.

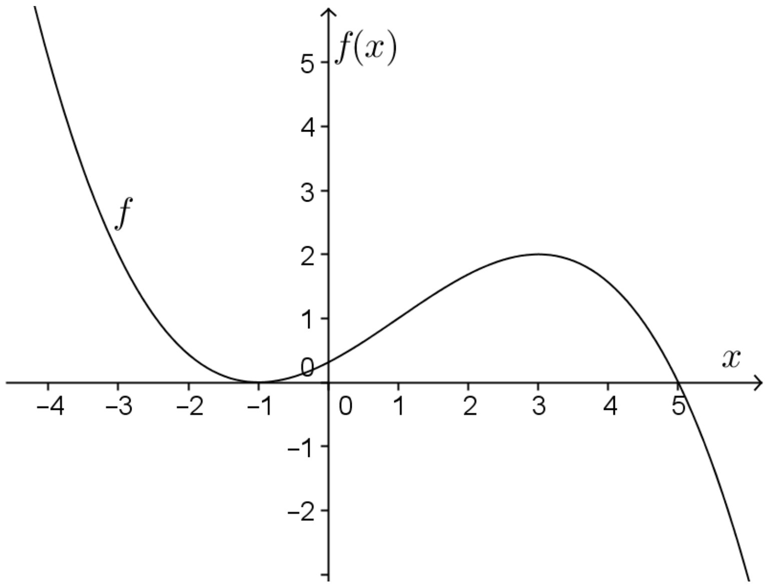
Aufgabenstellung:

Tragen Sie die Skalierung der Achsen so ein, dass eine Übereinstimmung mit den Werten der Tabelle und der Grafik gegeben ist! Zeichnen Sie dazu auf jeder Achse zumindest zwei ganzzahlige Werte ein!



x	*y*
–4	5,06
–3	2
–2	0,44
–1	0
0	0,31
1	1
2	1,69
3	2
4	1,56
5	0

Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Aus einer der Nullstellen ergibt sich die Skalierung der *x*-Achse, aus dem Punkt (1|1) die Skalierung der *y*-Achse.

Die Aufgabe ist dann als richtig gelöst zu werten, wenn die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten gut ablesbar sind und mindestens zwei ganzzahlige Werte auf jeder Achse eingetragen sind.

Kosten eines Betriebs* - 1_1253, FA4.3, Offenes Antwortformat

Die Funktion K mit $K(x) = 100 \cdot x^3 - 1\,800 \cdot x^2 + 11\,200 \cdot x + 20\,000$ gibt die Gesamtkosten in Euro an, die für einen Betrieb bei der Erzeugung von x (in Tonnen) eines bestimmten Produkts entstehen.

Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge (in Tonnen), bei der die Gesamtkosten um € 48.000 höher als die Fixkosten sind.

Negative Funktionswerte* - 1_555, FA4.3, Offenes Antwortformat

Gegeben ist die Gleichung einer reellen Funktion f mit $f(x) = x^2 - x - 6$. Einen Funktionswert $f(x)$ nennt man negativ, wenn $f(x) < 0$ gilt.
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, deren zugehöriger Funktionswert $f(x)$ negativ ist!

Lösungserwartung: Kosten eines Betriebs* - 1_1253, FA4.3, Offenes Antwortformat

$K(x) = 68\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 12$
Bei einer Produktionsmenge von 12 Tonnen sind die Gesamtkosten um € 48.000 höher als die Fixkosten.

Lösungserwartung: Negative Funktionswerte* - 1_555, FA4.3, Offenes Antwortformat

Für alle $x \in (-2; 3)$ gilt:

$f(x) < 0$

Nullstellen

Aufgabennummer: 1_270	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 2 - \frac{x^2}{8}$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie alle Werte von x, für die $g(x) = 0$ gilt!

Möglicher Lösungsweg

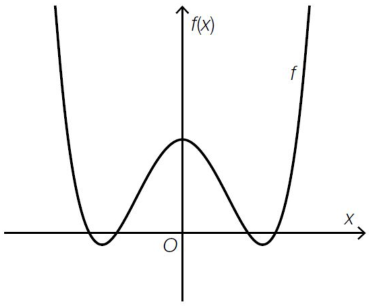
$x_1 = 4$ und $x_2 = -4$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn beide Werte korrekt angegeben sind.

Grad einer Polynomfunktion* - 1_887, FA4.4, Offenes Antwortformat

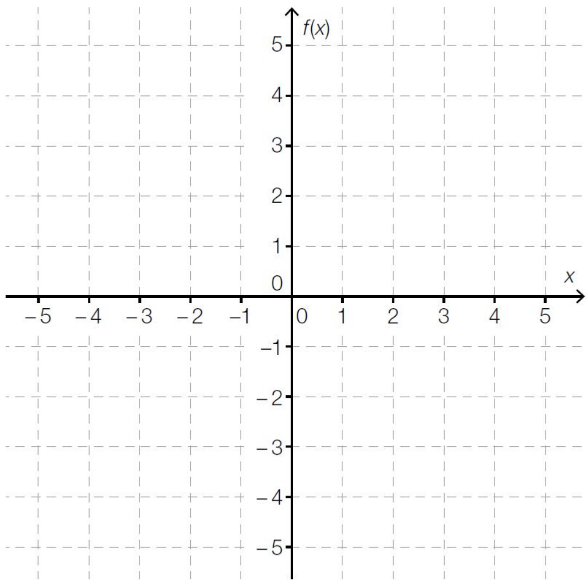
Nachstehend ist der Graph der Polynomfunktion f abgebildet. Außerhalb des dargestellten Bereichs hat f keine Null-, keine Extrem- und keine Wendestellen.



Begründen Sie, warum der Grad von f mindestens 4 sein muss.

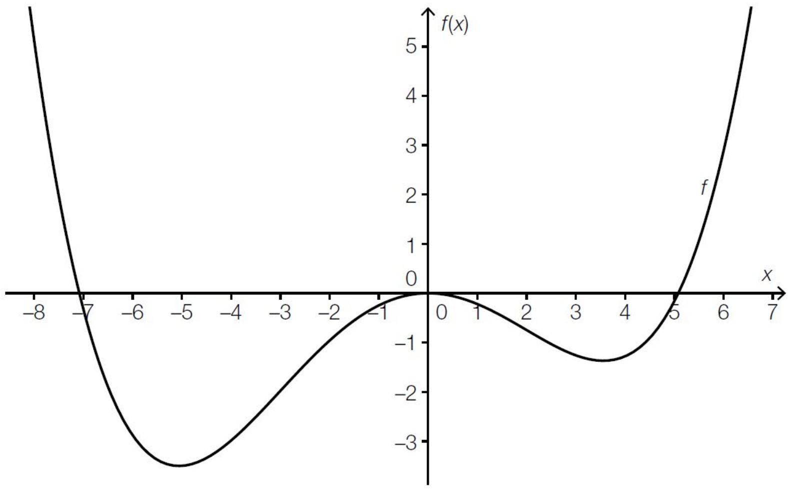
Polynomfunktionen dritten Grades* - 1_671, FA4.4, Konstruktionsformat

Eine Polynomfunktion dritten Grades ändert an höchstens zwei Stellen ihr Monotonieverhalten.
Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades f, die an den Stellen $x = -3$ und $x = 1$ ihr Monotonieverhalten ändert!



Polynomfunktion* - 1_623, FA4.4, Offenes Antwortformat

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f.



Begründen Sie, warum es sich bei der dargestellten Funktion nicht um eine Polynomfunktion dritten Grades handeln kann!

Symmetrische Polynomfunktion* - 1_388, FA4.4, Offenes Antwortformat

Der Graph einer zur senkrechten Achse symmetrischen Polynomfunktion f hat den lokalen Tiefpunkt $T = (3|-2)$.
Begründen Sie, warum die Polynomfunktion f mindestens 4. Grades sein muss!

Lösungserwartung: Grad einer Polynomfunktion* - 1_887, FA4.4, Offenes Antwortformat

Die Funktion hat 4 Nullstellen.

oder:

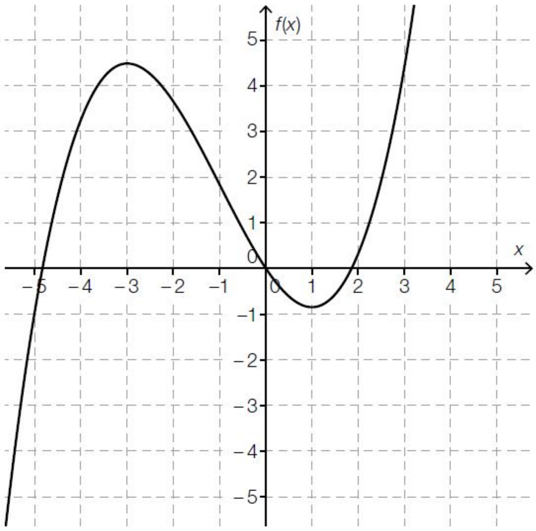
Die Funktion hat 3 Extremstellen.

oder:

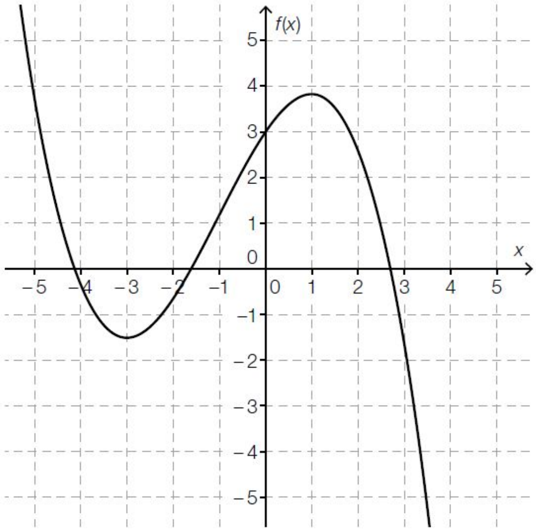
Die Funktion hat 2 Wendestellen.

Lösungserwartung: Polynomfunktionen dritten Grades* - 1_671, FA4.4, Konstruktionsformat

Mögliche Graphen:



oder:



Lösungserwartung: Polynomfunktion* - 1_623, FA4.4, Offenes Antwortformat

Mögliche Begründungen:

Eine Polynomfunktion dritten Grades hat höchstens zwei lokale Extremstellen. (Die dargestellte Funktion *f* hat aber mindestens drei lokale Extremstellen.)

oder:

Eine Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle. (Die dargestellte Funktion *f* hat aber mindestens zwei Wendestellen.)

oder:

Die dargestellte Funktion hat bei $x_1 \approx -7$ und bei $x_2 \approx 5$ jeweils eine Nullstelle und bei $x_3 \approx 0$ eine Nullstelle, die auch lokale Extremstelle ist. Damit kann im dargestellten Intervall die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ angegeben werden. Der Grad von *f* wäre somit zumindest vier.

Lösungserwartung: Symmetrische Polynomfunktion* - 1_388, FA4.4, Offenes Antwortformat

Wegen der Symmetrie muss ein weiterer lokaler Tiefpunkt vorliegen und damit auch ein lokaler Hochpunkt. Beim Vorliegen von mindestens drei Extrempunkten muss die Polynomfunktion mindestens 4. Grades sein.

Alternativen:
– Vorliegen eines weiteren Tiefpunkts und daher auch eines Hochpunkts
– Vorliegen von insgesamt drei Extrempunkten
– Vorliegen eines weiteren Tiefpunkts und nur gerader Potenzen aufgrund der Symmetrie

Polynomfunktion 3. Grades

Aufgabennummer: 1_083	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 4.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Polynomfunktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).

Aufgabenstellung:

Wie viele reelle Nullstellen kann diese Funktion besitzen?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

keine	☐
mindestens eine	☐
höchstens drei	☐
genau vier	☐
unendlich viele	☐

Lösungsweg

mindestens eine	☒
höchstens drei	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Nullstellen einer Polynomfunktion

Aufgabennummer: 1_039	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 4.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

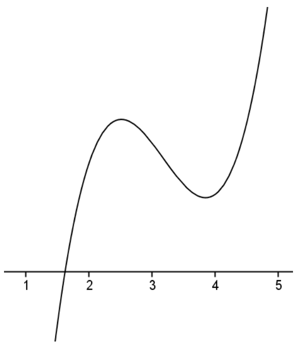
Wie viele verschiedene reelle Nullstellen kann eine Polynomfunktion 3. Grades haben?

Aufgabenstellung:

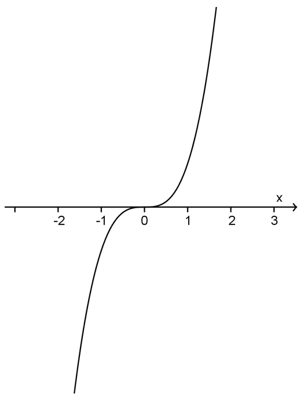
Veranschaulichen Sie Ihre Lösungsfälle durch jeweils einen möglichen Graphen!

Möglicher Lösungsweg

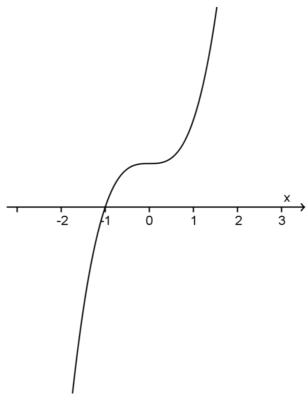
Eine Nullstelle:



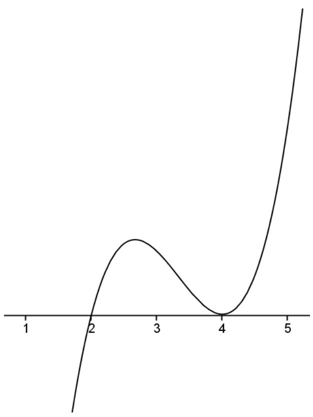
oder



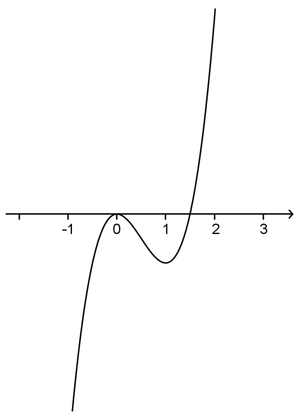
oder



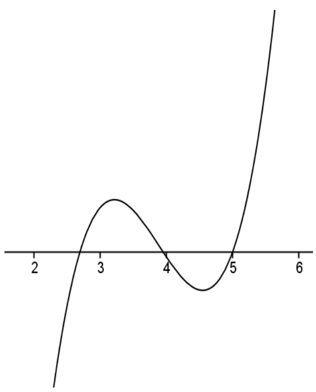
Zwei Nullstellen:



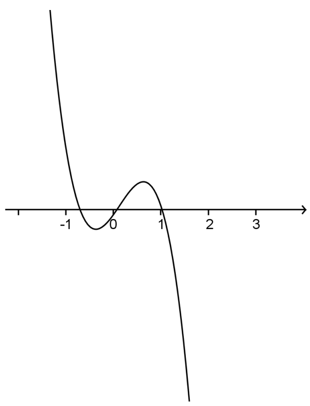
oder



Drei Nullstellen:



oder



Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn die Graphen entsprechend der richtigen Nullstellenanzahl korrekt skizziert sind.