Zwei Geraden im Raum* - 1_1248, AG3.4, Lückentext

Gegeben sind zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.

- $g: X = A + t \cdot \vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$
- $h: X = B + s \cdot \vec{b}$ mit $s \in \mathbb{R}$

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Falls ______①______ gilt, sind die Geraden g und h auf jeden Fall ______②______.

①	
$A \notin h$ und $\vec{a} = \vec{b}$	☐
$B \in g$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	☐
$\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $B \notin g$	☐

②	
schneidend	☐
identisch	☐
windschief	☐

Normale Geraden* - 1_1225, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist die Parameterdarstellung der Geraden g:

$$g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Für eine Gerade n gilt:

- n steht normal auf g.
- n schneidet g im Punkt $P = (2|-4|9)$.

Stellen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden n in Parameterdarstellung auf.

$n: X =$ ____

Punkt einer Geraden* - 1_1181, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben sind die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ mit $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$,

und der Punkt $A = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Der Punkt A liegt auf der Geraden g.

Berechnen Sie a.

$a =$ ____________________

Parameterdarstellung* - 1_810, AG3.4, Offenes Antwortformat

Gegeben ist eine Gerade g mit der Parameterdarstellung $g: X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie t so, dass $X = B$ gilt.

Parallele Geraden* - 1_665, AG3.4, 2 aus 5

Gegeben sind die Parameterdarstellungen zweier Geraden $g: X = P + t \cdot \vec{u}$ und $h: X = Q + s \cdot \vec{v}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ und $\vec{u}, \vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Welche der nachstehend angeführten Aussagen sind unter der Voraussetzung, dass die beiden Geraden zueinander parallel, aber nicht identisch sind, stets zutreffend?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$P = Q$	☐
$P \in h$	☐
$Q \notin g$	☐
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	☐
$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$ für ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐

Parallelität von Geraden* - 1_561, AG3.4, Offenes Antwortformat

Gegeben sind folgende Parameterdarstellungen der Geraden g und h:

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

$$h: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten h_y und h_z des Richtungsvektors der Geraden h so, dass die Gerade h zur Geraden g parallel ist!

Parameterdarstellung einer Geraden* - 1_418, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Die zwei Punkte $A = (-1|-6|2)$ und $B = (5|-3|-3)$ liegen auf einer Geraden g in $\mathbb{R}^3$.
Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden g unter Verwendung der konkreten Koordinaten der Punkte A und B an!

$g: X =$ ______________________________

Parameterdarstellung von Geraden* - 1_369, AG3.4, 2 aus 5

Gegeben ist eine Gerade g:

$$g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Geraden h_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) mit $t_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) sind parallel zu g?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

$h_1\colon X = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$h_2\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$h_3\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	☐
$h_4\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
$h_5\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	☐

Lösungserwartung: Zwei Geraden im Raum* - 1_1248, AG3.4, Lückentext

①	
$B \in g$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	☒

②	
schneidend	☒

Lösungserwartung: Normale Geraden* - 1_1225, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

z. B. $n\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösungserwartung: Punkt einer Geraden* - 1_1181, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

$a = -11$

Lösungserwartung: Parameterdarstellung* - 1_810, AG3.4, Offenes Antwortformat

$t = 1$

Lösungserwartung: Parallele Geraden* - 1_665, AG3.4, 2 aus 5

$Q \notin g$	☒
$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$ für ein $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	☒

Lösungserwartung: Parallelität von Geraden* - 1_561, AG3.4, Offenes Antwortformat

$h_y = -2$

$h_z = -4$

Lösungserwartung: Parameterdarstellung einer Geraden* - 1_418, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

$g\colon X = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösungserwartung: Parameterdarstellung von Geraden* - 1_369, AG3.4, 2 aus 5

$h_2: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$	☒
$h_4: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☒

Punkt und Gerade

Aufgabennummer: 1_297	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind der Punkt $P = (-1|5|6)$ und die Gerade g, die durch die Punkte $A = (2|-3|2)$ und $B = (5|1|0)$ verläuft.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob der gegebene Punkt P auf der Geraden g liegt, und überprüfen Sie diese Aussage anhand einer Rechnung!

Möglicher Lösungsweg

Der Punkt P liegt nicht auf der Geraden g, denn:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Überprüfung, ob $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$ gilt, ergibt, dass $\overrightarrow{AP}$ kein Vielfaches von $\overrightarrow{AB} \Rightarrow P \notin g$ ist.
Alternativ kann man auch rechnerisch zeigen, dass es keinen Wert für s gibt, sodass die Gleichung $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ erfüllt ist.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn der angeführte oder ein äquivalenter rechnerischer Nachweis, der zeigt, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt, erbracht wurde.

Geraden im $\mathbb{R}^3$*

Aufgabennummer: 1_137	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Zwei der folgenden Gleichungen sind ebenfalls Parameterdarstellungen der Geraden g. Kreuzen Sie diese beiden Gleichungen an!

$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☒
$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Gleichungen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Idente Geraden

Aufgabennummer: 1_089	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g\colon X = P + t \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

und

$$h\colon X = Q + s \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

mit $t, s \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche Schritte notwendig sind, um die Identität der Geraden nachzuweisen!

Möglicher Lösungsweg

Wenn der Richtungsvektor der Geraden g ein Vielfaches des Richtungsvektors der Geraden h ist (bzw. umgekehrt h ein Vielfaches von g ist), so sind die beiden Geraden parallel oder ident.

Liegt außerdem noch der Punkt P auf der Geraden h (seine Koordinaten müssen die Gleichung

$$P = Q + s \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

erfüllen) bzw. liegt der Punkt Q auf der Geraden g (seine Koordinaten müssen die Gleichung

$$Q = P + t \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

erfüllen), so sind die Geraden ident.

Lösungsschlüssel

Antworten, die sinngemäß der Lösungserwartung entsprechen, sind als richtig zu werten.